

Бюджетное учреждение Орловской области
дополнительного профессионального образования
«Институт развития образования»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
по подготовке обучающихся к государственной итоговой аттестации
(основному государственному экзамену) по МАТЕМАТИКЕ
в 2022-2023 учебном году

*Шевлякова Е.В., Сурков Е.Н.,
отдел физики и математики
БУ ОО ДПО «Институт развития образования»*

1. Результаты ОГЭ по математике в 2021-2022 учебном году

1.1. Краткая характеристика КИМ по математике

КИМ ОГЭ 2022 года по сравнению с 2021 годом изменений ни в структуре, ни в содержании не претерпел.

Работа содержала 25 заданий и состояла из двух частей. Часть 1 содержала 19 заданий с кратким ответом базового уровня, часть 2 содержала 6 заданий с развернутым ответом, в том числе, 4 задания повышенного уровня и 2 задания высокого уровня сложности.

Часть 1 была направлена на проверку базовой математической компетентности, часть 2 – на проверку владения материалом на повышенном и высоком уровнях.

В первой части КИМ, содержались задания по всем ключевым разделам курса математики основной школы, отраженным в кодификаторе элементов содержания. В нее вошли задания следующих содержательных разделов: числа и вычисления; алгебраические выражения; уравнения и неравенства; числовые последовательности; функции и графики; координаты на прямой и на плоскости; геометрия, статистика и теория вероятностей.

Во вторую часть вошли задания следующих содержательных разделов: Уравнения и неравенства, Функции и графики; геометрия. Задания второй части направлены на проверку таких качеств математической подготовки выпускников, как: уверенное владение формально-оперативным алгебраическим аппаратом; умение решить комплексную задачу, включающую в себя знания из разных тем курса алгебры; умение решить планиметрическую задачу, применяя различные теоретические знания курса геометрии; умение математически грамотно и ясно записать решение, приводя при этом необходимые пояснения и обоснования; владение широким спектром приёмов и способов рассуждений.

1.2. Анализ результатов основного государственного экзамена в 2022 году

В таблице №1 представлена динамика результатов ОГЭ по математике в регионе за последние 4 года.

Таблица №1.
Динамика результатов ОГЭ по математике в Орловской области

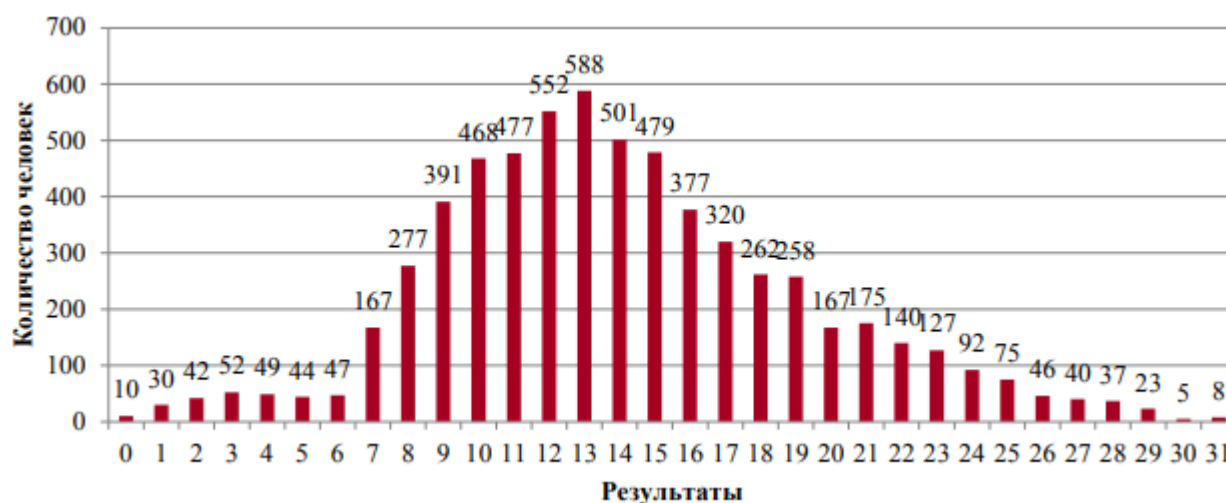
	2019		2021		2022	
	чел.	%	чел.	%	чел.	%
Получили «2»	228	3,4	423	6,81	307	4,85
Получили «3»	2415	36,03	3095	49,86	3388	53,56
Получили «4»	2804	41,83	2025	32,62	2038	32,22
Получили «5»	1256	18,74	665	10,71	593	9,37

Данные таблицы №2 свидетельствуют о том, что по сравнению с 2021 годом доля выпускников, не преодолевших аттестационного порога, значительно снизилась (2021 г. – 6,81%, 2022 г. – 4,85%).

Увеличилось число участников, получивших отметку «3» (2021 г – 49,86%; 2022 г. – 53,56%).

Доля выпускников, сдавших экзамен на «хорошо» практически не изменилась. Процент обучающихся, получивших «отличный» результат на экзамене по математике, уменьшилась почти на 1,34 %.

Диаграмма №1.
Распределение первичных баллов участников ОГЭ по математике в 2022 г.



Анализ диаграммы 1 показывает, что максимум распределения баллов в 2022 году сместился вправо и соответствует 13 баллам, что говорит о росте числа выпускников получивших оценку «удовлетворительно», которые уверенно преодолели минимальный порог с «запасом» 4-5 баллов. Отсутствуют

резкие скачки на границах минимального порога к отметке «3» и отметок «4» и «5», что соответствует нормальному распределению баллов в диаграмме.

Таким образом, можно заметить положительную динамику результатов государственной итоговой аттестации по математике в 2022 году.

В таблице №2 представлена статистика выполнения заданий группами выпускников с наиболее низким процентом правильных решений: базовый уровень – менее 50%, повышенный и высокий – менее 15% в 2022 году.

*Таблица №2.
Статистика выполнения наиболее проблемных заданий
КИМ ОГЭ по математике в 2022 году*

Номер задания в КИМ	Уровень сложности задания	Средний процент выполнения	Процент выполнения по региону в группах, получивших отметку			
			«2»	«3»	«4»	«5»
2.	Базовый	33,75	8,79	23,25	47,64	57,34
5.	Базовый	25,47	4,23	9,53	42,10	70,32
16.	Базовый	31,81	3,26	21,16	42,74	69,81
22.	Высокий	5,87	0,00	0,07	4,10	48,15
24.	Повышенный	4,10	0,00	0,09	1,64	37,61
25.	Высокий	0,47	0,00	0,00	0,05	4,89

Анализ решения заданий ОГЭ базового уровня показал, что наибольшие трудности у участников экзамена вызвали задания из разделов:

– числа и вычисления, проверяющее умение использовать приобретенные знания в практической деятельности и повседневной жизни, умение строить и исследовать простейшие математические модели (№2 - 33,75%, №5 - 25,47%);

– геометрия, проверяющее умение выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами (№16 - 31,81%).

Проблемными заданиями повышенного и высокого уровня сложности стали задания: из раздела функции и их графики, проверяющие умения строить и читать графики функций, строить и исследовать простейшие математические модели № 22 (процент выполнения составил 5,87 %); практически все задания повышенного и высокого уровня сложности из раздела геометрия (№№23-25) вызвали затруднения. Особенно следует выделить задание 24 (средний процент выполнения 4,1 %), требующее умение строить доказательные рассуждения в геометрических задачах, и задание номер 25 – геометрическая задача высокого уровня сложности, проверяющая умение строить логически

обоснованные комбинации утверждений, направленные на решение поставленной задачи.

Наряду с этим стоит заметить, что процент выполнения заданий №13 (проверяет умения решать уравнения, неравенства и их системы) и №14 (проверяет умения использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни, умения строить и исследовать простейшие математические модели) остается на уровне прошлого года - 55% и 54% соответственно, что говорит о наличии определенных проблем в изучении и преподавании соответствующих разделов курса математики.

Трудности вызывают задания раздела «Геометрия» первой части КИМ (№№15-19), процент выполнения заданий №17, №19 так же не очень высок.

Разбор решений наиболее сложных заданий, заданий с низким процентом решаемости и методические советы по подготовке к их успешному выполнению представлены в приложении.

2. О подготовке обучающихся к ОГЭ в 2022-2023 учебном году

Структура и содержание контрольно – измерительных материалов ОГЭ по математике в 2023 году останутся без изменений по сравнению с 2022 г.

Для прохождения аттестационного порога необходимо набрать не менее 8 баллов, из которых не менее 2 баллов должны быть получены за решение заданий по геометрии (задания №15-№19, №23-№25). К заданиям практического содержания относятся задания №1-5; к заданиям по алгебре №6-14 и №20-22.

Требования к обязательному решению определённой части геометрических задач для получения положительной отметки за экзаменационную работу определяется единством требований государственной итоговой аттестации за курс основной и средней школы и обеспечивается общими подходами к разработке заданий. Включение в ОГЭ в качестве обязательного для преодоления аттестационного порога блока заданий по геометрии существенно сказалось на росте результатов выполнения заданий по геометрии в ЕГЭ.

При организации образовательной деятельности по подготовке к ГИА необходимо руководствоваться нормативными документами, регулирующими проведение итоговой аттестации по математике, и методическими материалами, которые размещены на сайтах ФИПИ (www.fipi.ru) и Министерства просвещения Российской Федерации (<https://edu.gov.ru/>).

С целью совершенствования преподавания математики в образовательной организации педагогам рекомендовано использовать конкретные методики.

Методики:

– методика построения математической модели и ее интерпретации при решении текстовых задач;

– методика решения задач по геометрии, включающая в себя умения читать и строить чертеж, устанавливать причинно-следственные связи при доказательстве тех или иных геометрических фактов.

– методика решения уравнений и неравенств;

Ввиду серьезных затруднений в решении задач практико – ориентированного блока, в уроки математики необходимо систематически включать задания практической направленности. Для этого дополнительно можно воспользоваться пособиями из серии «Функциональная грамотность. Учимся для жизни», в частности «Математическая грамотность (сборник эталонных заданий)», авт. Рослова Л.О., Ковалева Г.С., Рыдзе О.А. Пособие содержит развернутое описание особенностей заданий практической направленности, рекомендации по их использованию в учебном процессе, а так же различные интернет-ресурсы.

Интернет-ресурсы, рекомендуемые для использования в работе по формированию и развитию математической грамотности обучающихся:

- <https://fg.resn.edu.ru/> / (электронный банк заданий для оценки функциональной грамотности);
- <http://skiv.instrao.ru/bank-zadaniy/matematiceskaya-gramotnost/> (банк заданий для оценки математической грамотности).
- <https://disk.yandex.ru/d/6QIHsk3mSU13Og> (подборка заданий, подготовленная методистами БУ ОО ДПО «Институт развития образования»).

Еще одним ключевым направлением для успешного решения задач является овладение обучающимися в полной мере элементами читательской грамотности, а это значит необходимо на уровне образовательной организации выстраивать взаимодействие учителей-предметников, способных работать над формированием данной компетенции у всех участников образовательных отношений.

Выполнение заданий геометрического блока традиционно вызывает наибольшие затруднения. Прежде всего, незнание фундаментальных геометрических формул и неумение их использовать, а также незнание свойств основных планиметрических фигур полностью лишает учащихся возможности применять свои знания по планиметрии при решении соответствующих задач на ГИА. Необходимо обеспечить прочность и системность знаний по изучаемым темам геометрии: определений изучаемых понятий, формулировок теорем и аксиом, утверждений, выражающих свойства и признаки понятий, свойства отношений между геометрическими объектами и величинами.

Необходимо предлагать учащимся решать геометрические задачи на применение знаний по изучаемой теме, образующие систему заданий:

- задачи, направленные на достижение всех планируемых результатов освоения учебного материала;
- задачи прямые и обратные;
- задачи, решаемые по готовым чертежам и требующие самостоятельного построения чертежа;
- задачи, требующие полного развернутого обоснования решения;

- задачи, требующие краткого ответа;
- задачи на применение одного теоретического факта и задачи на комплексное применение знаний;
- задания, требующие решения задачи разными способами, конструирования задачи на применение знания;
- задачи, требующие осуществления различных видов деятельности: практических действий построений и измерений; нахождения геометрических величин на основе рассуждений, преобразований и вычислений; доказательства.

Следует требовать от обучающихся умения оценивать решение задач по содержательным критериям, в том числе формулировать критерии оценки геометрических задач.

Целесообразно использовать любые приемы и средства, которые способствовали бы визуализации предлагаемых школьникам задач. Это не только построение чертежей по условию задачи, это, прежде всего различные предметные модели, компьютерные программы, позволяющие выполнять стереометрические чертежи. Недостаток графических, геометрических представлений отражается и на результатах выполнения заданий из других разделов курса математики. Не более половины участников экзамена могут переформулировать условие с формального языка на графический и наоборот. Справиться с проблемой поможет усиленная работа с графиками, в том числе использование соответствующих компьютерных программ.

На этапах систематического и обобщающего повторения учебных тем из раздела «Уравнения и неравенства» необходима систематизация знаний обучающихся по данному разделу, организация повторения методов решения уравнений и неравенств, классификация уравнений и неравенств, выделение их типов и соотнесение каждого типа уравнения и неравенства с методами решения. Необходимо реализовывать поэтапное формирование действий по решению уравнений и неравенств различными методами, способами, используя ориентировочную основу методов решения уравнений (опорные конспекты, памятки, алгоритмы, др.) при изучении соответствующих тем курса алгебры.

Для успешной подготовки обучающихся к итоговой аттестации необходимо дифференцировать учебный материал по типам уравнений и неравенств, методам решений и уровням сложности и организовать индивидуализированную учебную деятельность в форме практикума.

Для достижения поставленных целей педагогам необходимо разработать (или структурировать имеющиеся):

- систему коррекционных материалов по каждой единице содержания учебного материала, подлежащего повторению или повторному изучению. Эти коррекционные материалы должны содержать следующие разделы: справочные материалы (определения, свойства, правила, теоремы, аксиомы, алгоритмы и др.), примеры решения типовых задач, задания для самостоятельной работы, эталоны для контроля, критерии оценки;
- диагностические работы по каждой единице содержания учебного материала, подлежащего повторному изучению и новому материалу;

– альтернативные материалы – задания, позволяющие достичь планируемых результатов освоения раздела в соответствии с теорией поэтапного формирования действий, отличающиеся от заданий УМК наличием опор, подсказок, альтернативных способов выполнения задания при освоении нового материала в сотрудничестве с учителем, одноклассниками, организующих тренинг осваиваемых действий;

– средства организации самостоятельной учебной деятельности: инструкций, памяток, образовательных маршрутов.

Широко использовать в практике подготовки к ГИА по математике открытые банки заданий (www.fipi.ru), которые позволят познакомить учащихся с особенностями и содержанием экзаменационных задач.

Создать условия для дифференцированного и индивидуального обучения (в том числе в части преодоления аттестационного порога и выработки стратегии подготовки каждого выпускника к успешной сдаче ОГЭ):

- это относится и к работе на уроке, и к дифференциации домашних заданий и заданий, предлагающихся учащимся на контрольных, проверочных, диагностических работах;

- выделить круг доступных заданий для обучающихся со слабой математической подготовкой, помочь им освоить основные математические понятия, сформировать уверенные навыки решения таких заданий, и вселить уверенность в том, что аттестационный порог им по силам преодолеть;

- отработать с обучающимися с повышенным уровнем подготовки порядок оформления заданий второй части: математически грамотно и ясно записывать решения, приводя при этом необходимые пояснения и обоснования. Обратить внимание учеников на обязательность записи ответов в заданиях второй части, правила построения чертежей, оформление решения задачи;

- организовать проведение групповых и индивидуальных консультаций для обучающихся.

Методическую помощь учителям и обучающимся при подготовке к ОГЭ могут оказать:

- документы, определяющие структуру и содержание КИМ ОГЭ 2023 (<https://fipi.ru/oge/demoversii-specifikacii-kodifikatory#!/tab/173801626-2>);

- открытый банк заданий (<https://fipi.ru/oge/otkrytyy-bank-zadaniy-oge#!/tab/173942232-2>);

- тренировочные работы сайта СтатГрад (<https://statgrad.org/>);

- материалы сайта «Решу ОГЭ» (<https://math-oge.sdangia.ru/>);

- сайт Александра Ларина (<https://alexlarin.net/>);

- журнал «Педагогические измерения» (<https://fipi.ru/zhurnal-fipi>)

- методические рекомендации на основе анализа типичных ошибок участников ОГЭ прошлых лет (<http://oipo.pf/metodicheskie-rekomendacii/>);

- опыт лучших практик образовательных организаций Орловской области и России, имеющих стабильный положительный результат сдачи ОГЭ;

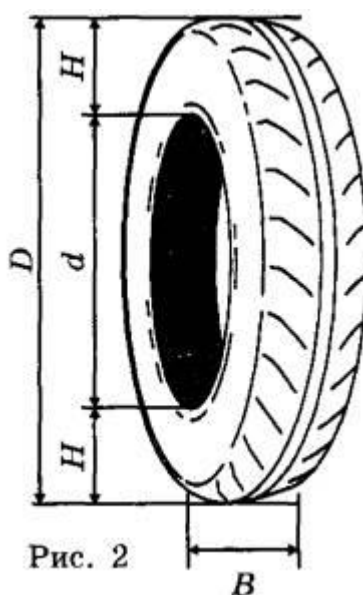
- занятия по индивидуальным маршрутам обучения на курсах ПК при БУ ОО ДПО «Институт развития образования».

При подготовке данных рекомендаций использовались материалы отчета председателя предметной комиссии о результатах проведения основного государственного экзамена по математике в 2022 году в Орловской области.

Разбор заданий с низким процентом правильных решений
и методические советы по подготовке к их успешному выполнению

Практико-ориентированные задания №№1–5

Для маркировки автомобильных шин применяется единая система обозначений (см. рис. 1). Первое число означает ширину B шины (ширину протектора) в миллиметрах (см. рис. 2). Второе число — отношение высоты боковины H к ширине шины B в процентах.



Последующая буква указывает конструкцию шины. Например, буква R означает, что шина радиальная, то есть нити каркаса в боковине шины расположены вдоль радиусов колеса. На всех легковых автомобилях применяются шины радиальной конструкции.

За обозначением типа конструкции шины идёт число, указывающее диаметр диска колеса в дюймах (в одном дюйме 25,4 мм). По сути, это диаметр d внутреннего отверстия в шине. Таким образом, общий диаметр колеса D легко найти, зная диаметр диска и высоту боковины.

Возможны дополнительные маркировки, означающие допустимую нагрузку на шину, сезонность использования, тип дорожного покрытия и другие.

Завод производит легковые автомобили определённой модели и устанавливает на них шины с маркировкой 185/60 R15. Завод допускает установку шин с другими маркировками. В таблице показаны разрешённые размеры шин.

Диаметр диска (дюймы) Ширина шины	14	15	16	17
175	175/70	175/65	Не разр.	Не разр.
185	185/70	185/60	185/55	Не разр.
195	195/65	195/60	195/50, 195/55	195/45
205	205/60	205/55	205/50	205/45
215	Не разр.	Не разр.	215/45	215/40

Задание 1. Какой наименьшей ширины шины можно устанавливать на автомобиль, если диаметр диска равен 16 дюймам? Ответ дайте в миллиметрах.

Решение.

Из таблицы видно, что при диаметре 16 дюймов наименьшая ширина шины равна 185 мм (первое число до дроби).

Ответ: 185

Задание 2. На сколько миллиметров радиус колеса с маркировкой 175/65 R15 больше, чем радиус колеса с маркировкой 205/55 R15?

Решение.

Сначала вычислим диаметры колес с указанными маркировками. Для маркировки 175/65 R15, имеем:

$$D_1 = \underbrace{15 \cdot 25,4}_{\text{диаметр диска}} + 2 \cdot \underbrace{\frac{65}{100} \cdot 175}_{\text{размер боковины}} = 608,5$$

а для маркировки 205/55 R15

$$D_2 = \underbrace{15 \cdot 25,4}_{\text{диаметр диска}} + 2 \cdot \underbrace{\frac{55}{100} \cdot 205}_{\text{размер боковины}} = 606,5$$

Получаем разность в радиусах колес:

$$\frac{D_2}{2} - \frac{D_1}{2} = \frac{D_2 - D_1}{2} = \frac{608,5 - 606,5}{2} = 1 \text{ мм}$$

Ответ: 1.

Задание 3. Найдите диаметр D колеса автомобиля, выходящего с завода. Ответ дайте в сантиметрах.

Решение.

Завод выпускает шины с маркировкой 185/60 R15. Имеем диаметр диска 15 дюймов = $15 \cdot 25,4 = 381$ мм, высоту боковины

$$\frac{H}{B} \cdot 100 = 60 \Rightarrow H = \frac{60}{100} \cdot B = 0,6 \cdot 185 = 111 \text{ мм}$$

и диаметр колеса:

$$D = 381 + 2H = 381 + 2 \cdot 111 = 603 \text{ мм},$$

что составляет 60,3 см.

Ответ: 60,3.

Задание 4. На сколько миллиметров увеличится диаметр D колеса, если заменить шины, установленные на заводе, шинами с маркировкой 205/45 R17?

Решение.

Диаметр колеса D с маркировкой 205/45 R17 можно вычислить по формуле:

$$D = \underbrace{17 \cdot 25,4}_{\text{диаметр диска}} + 2 \cdot \underbrace{\frac{45}{100} \cdot 205}_{\text{размер боковины}} = 616,3$$

И этот диаметр больше диаметра 603 мм заводского колеса на $616,3 - 603 = 13,3$ мм.

Ответ: 13,3

Задание 5. На сколько процентов увеличится пробег автомобиля при одном обороте колеса, если заменить шины, установленные на заводе, шинами с маркировкой 205/45 R17? Округлите результат до десятых.

Решение.

Найдем диаметр колеса с маркировкой 205/45 R17, он равен 616,3 мм. Один оборот колеса с таким диаметром проходит путь, равный

$$S_1 = 2\pi R = \pi D = 616,3\pi \text{ мм}$$

а с заводским диаметром 603 мм, путь

$$S_2 = 603\pi \text{ мм}$$

Отношение этих величин дает:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{616,3\pi}{603\pi} \approx 1,022$$

то есть, пробег увеличится на 2,2%.

Ответ: 2,2.

Уравнения и неравенства

Задание 13

Найдите наибольшее значение x , удовлетворяющее системе неравенств

$$\begin{cases} 6x + 18 \leq 0, \\ x + 8 \geq 2. \end{cases}$$

Решение.

Решим систему:

$$\begin{cases} 6x + 18 \leq 0, \\ x + 8 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3, \\ x \geq -6 \end{cases} \Leftrightarrow -6 \leq x \leq -3.$$

Искомое наибольшее решение неравенства равно -3 .

Ответ: -3 .

Задание 20

Решите уравнение $(x+2)^4 - 4(x+2)^2 - 5 = 0$.

Решение. Пусть $(x+2)^2 = t$, $t \geq 0$, тогда:

$$t^2 - 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1, \\ t = 5 \end{cases} \Leftrightarrow_{t \geq 0} t = 5.$$

Вернемся к исходной переменной:

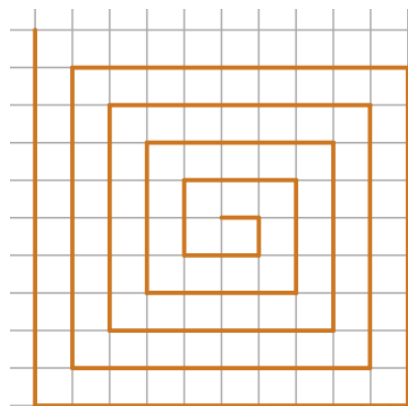
$$(x+2)^2 = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = -\sqrt{5}, \\ x+2 = \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - \sqrt{5}, \\ x = -2 + \sqrt{5}. \end{cases}$$

Ответ: $\{-2 - \sqrt{5}; -2 + \sqrt{5}\}$.

Задание с практическим содержанием, направленное на проверку умения применять знания о последовательностях и прогрессиях в прикладных ситуациях

Задание 14

На клетчатой бумаге с размером клетки 1 x 1 нарисована «змейка», представляющая собой ломаную, состоящую из чётного числа звеньев, идущих по линиям сетки. На рисунке изображён случай, когда последнее звено имеет длину 10. Найдите длину ломаной, построенной аналогичным образом, последнее звено которой имеет длину 120.



Решение.

Длина змейки, изображенной на рисунке, составляет $10+10+9+9+8+\dots+3+2+2+1+1$ и представляет арифметическую прогрессию, члены которой учтены два раза, первый член равен 10, а разность — 1.

Найдем сумму арифметической прогрессии для змейки, звено последнее звено которой 120

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{10 + 120}{2} \cdot 120 = 121 \cdot 60 = 7260.$$

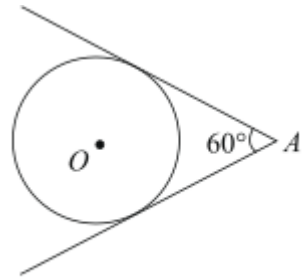
Каждый член прогрессии должен быть учтен дважды, следовательно, длина змейки $S = 2S_n = 14520$.

Ответ: 14520.

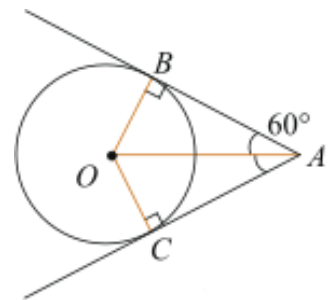
Геометрическая задача, проверяющая умение выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами (Окружность, круг и их элементы).

Задание 16.

Из точки A проведены две касательные к окружности с центром в точке O . Найдите радиус окружности, если угол между касательными равен 60° , а расстояние от точки A до точки O равно 8.



Решение. Проведём радиусы OB и OC в точки касания. Получили два прямоугольных треугольника, катет $OB = OC = R$, где R — радиус окружности, гипотенуза AO этих двух прямоугольных треугольников — общая, следовательно, эти треугольники равны. То есть, имеется равенство углов



$$\angle BAO = \angle OAC = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ.$$

Теперь из треугольника AOB найдём радиус OB

$$OB = AO \cdot \sin 30^\circ = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4.$$

Ответ: 4.

Текстовая задача на проценты, сплавы и смеси

Задание 21.

На изготовление 231 детали ученик тратит на 11 часов больше, чем мастер на изготовление 462 таких же деталей. Известно, что ученик за час делает на 4 детали меньше, чем мастер. Сколько деталей в час делает ученик?

Решение.

Предположим, что ученик делает x деталей в час, $x > 0$. Тогда мастер делает $x + 4$ детали в час.

Составим таблицу по данным задачи:

	Производительность (дет/ч)	Время (ч)	Объём работ (дет)
Ученик	x	$\frac{231}{x}$	231
Мастер	$x + 4$	$\frac{462}{x + 4}$	462

Так как ученик потратил на работу на 11 часов больше, можно составить уравнение:

$$\frac{231}{x} - \frac{462}{x+4} = 11.$$

Решим уравнение, предварительно разделив обе части на 11:

$$\frac{21}{x} - \frac{42}{x+4} = 1 \Leftrightarrow \frac{21x + 84 - 42x}{x(x+4)} = 1 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} 84 - 21x - x(x+4) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 25x - 84 = 0.$$

Корни полученного квадратного уравнения: -28 и 3 . Отбрасывая отрицательный корень, находим, что ученик делает в час 3 детали.

Ответ: 3.